Virtuelle Berufsoberschule Bayern

www.vibos.de

Materialien zum Vorkurs Mathematik

1 Elementares

1.2 Lineare und quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Hinweis:
Die nachfolgenden Materialien wurden als Auszug aus den bisherigen digitalen, interaktiven und auf Flash basierenden Lernmodulen generiert. Da Flash abgeschaltet wurde, bietet die VIBOS inhaltlich geeignete Lernmaterialien übergangsweise in diesem nicht interaktiven Format an. Die neuen interaktiven VIBOS-Lernmodule werden nach und nach entwickelt und veröffentlicht.

Gleichungen

Eine Gleichung entsteht, wenn Terme (Rechenausdrücke) durch ein Gleichheitszeichen „=“ verbunden werden. Sind dabei alle Terme definiert, so kann entweder eine wahre oder eine falsche Aussage entstehen.

z.B.: $5+3 = 8$; wahre Aussage, $2\cdot 5 = 11$; falsche Aussage, $\frac{5}{0} = 1$; der Bruch $\frac{5}{0}$ ist nicht definiert.

Enthält eine Gleichung eine Variable x, so kann - je nachdem welche Zahl man für x einsetzt - eine wahre oder falsche Aussage entstehen. (Vorausgesetzt alle Terme sind definiert !)

Betrachtet man z.B. die Gleichung $\mathbf{x + \frac{3}{x} = 4}$:

Für $x = 0$ erhält man: $0 + \frac{3}{0} = 4$; einen nicht definierten Term (division by zero!).

Für $x = 1$ erhält man: $1 + \frac{3}{1} = 4$; eine wahre Aussage. Ebenso erhält man für $x = 3$ eine wahre Aussage, nämlich $3 + \frac{3}{3} = 4$.

Für $x = 2$ erhält man: $2 + \frac{3}{2} = 4$; eine falsche Aussage.

Sie werden später feststellen, dass außer den beiden Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ keine weiteren reellen Zahlen existieren, die eine wahre Aussage entstehen lassen.

Bezeichnungen

Die Menge der Zahlen, die zum Einsetzen für die **Variable** x zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**. (Sie werden, wenn nichts Konkretes vereinbart ist, stets annehmen dürfen, dass gilt: $G = \mathbb{R}$.

Die Menge der Zahlen, die beim Einsetzen definierte Terme entstehen lassen, heißt **Definitionsmenge D.**

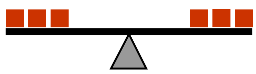
Die Menge der Zahlen, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben, heißt **Lösungsmenge L.**

Die Elemente der Lösungsmenge L heißen **Lösungen** der Gleichung. Stets gilt: $L \subseteq D \subseteq G$

Ist $G = \mathbb{R}$, so gilt für die obige Gleichung $x + \frac{3}{x} = 4$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $L = \{1; 3\}$

Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge haben, heißen **äquivalent**. Umformungen von Gleichungen (bzw. Ungleichungen), die die Lösungsmenge nicht verändern, heißen **Äquivalenzumformungen**. Äquivalenzumformungen dienen dazu die Lösungsmengen vieler (nicht aller) Gleichungen zu bestimmen.

Anmerkung: Geht man davon aus, dass eine Gleichung wahr ist, so ist die bildhafte Vorstellung einer Balkenwaage, die sich im **Gleich**gewicht befindet, durchaus hilfreich. Die Waage bleibt nur dann im Gleichgewicht, wenn auf **beiden** Seiten die **gleiche** "Operation" ausgeführt wird.



klick

Einfache Äquivalenzumformungen

1 Zu beiden Seiten einer Gleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden.

Bsp.:
$$\begin{aligned} & 3x + 6 = 8 \,; \;\big|\; -6 \\ \Leftrightarrow\; & 3x + 0 = 2 \,; \\ & 3x = 2 \,; \end{aligned}$$

Anmerkung

Bsp.:
$$\begin{aligned} & 3x - 6 = x + 1 \,; \;\big|\; -x + 6 \\ \Leftrightarrow\; & 2x + 0 = 0 + 7 \,; \\ & 2x = 7 \,; \end{aligned}$$

Anmerkung

Bsp.:
$$\begin{aligned} & \frac{x-3}{2} = \frac{1}{x-1} \,; \;\Big|\; -\frac{1}{x-1} \\ \Leftrightarrow\; & \frac{x-3}{2} - \frac{1}{x-1} = 0 \,; \end{aligned}$$

Anmerkung

2 Beide Seiten einer Gleichung dürfen mit der gleichen Zahl $\mathbf{z \neq 0}$ **multipliziert** werden.

Bsp.:
$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}\cdot x = 2 \,; \;\Big|\; \cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\; & 1\cdot x = -\frac{8}{3} \,; \\ & x = -\frac{8}{3} \,; \end{aligned}$$

Anmerkung

Bsp.:
$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}x - 5 = -x + \frac{1}{2} \,; \;\Big|\; \cdot 6 \\ \Leftrightarrow\; & 6\cdot\left(\frac{2}{3}x - 5\right) = 6\cdot\left(-x + \frac{1}{2}\right); \\ & 4x - 30 = -6x + 3 \end{aligned}$$

Anmerkung

Bsp.:
$$\begin{aligned} a\cdot x &= 3 \,; \;\Big|\; \cdot\frac{1}{a} \text{ nur falls } a \neq 0 \\ x &= \frac{3}{a} \,; \end{aligned}$$
Für $a = 0$ hat die Gleichung $0 = 3$; keine Lösung.

Anmerkung

Achtung! Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der Zahl 0 ist **keine** Äquivalenzumformung. (Die Lösungsmenge wird verändert !)
Bsp.: Aus der Gleichung $x - 3 = 0$, die nur die Lösung $x = 3$ besitzt, wird durch Multiplikation beider Seiten mit der Zahl 0 die Gleichung $0 = 0$. Diese Gleichung ist aber für alle Zahlen x wahr, besitzt also die Lösungsmenge $L = G$.

Achtung! Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term, der von der Variablen x abhängt, ist im Allgemeinen **keine** Äquivalenzumformung.
Bsp.: Aus der Gleichung $x - 3 = 0$, die nur die Lösung $x = 3$ besitzt, wird durch Multiplikation beider Seiten mit der Zahl $(x - 1)$ die Gleichung $(x - 1)\cdot(x - 3) = 0$. Diese Gleichung besitzt aber nach dem 1. Satz der Algebra nun zwei Lösungen; nämlich $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Das Lösen linearer Gleichungen

vibos.de

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b = 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Gleichung**.
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Betrachten Sie sich alle unten aufgeführten Beispiele und beobachten Sie die Denkschritte genau.

Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 normal   Bsp.2   Bsp.3   Bsp.4   Bsp.5
Bsp.1 alternativ

klick

Gleichung	Äquivalenz-umformung
$\frac{2}{3}x - 4 = \frac{5}{2}x + \frac{1}{6}$	$\mid \cdot 2 \cdot 3$
$4x - 24 = 15x + 1$	$\mid -15x + 24$
$-11x = 25$	$\mid \cdot \left(-\frac{1}{11}\right)$
$\boxed{x = -\frac{25}{11}}$	

$$\boxed{L = \left\{-\frac{25}{11}\right\}}$$

Fazit: Alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

besitzen genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

Das Lösen linearer Gleichungen

vibos.de

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b = 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Gleichung**.
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Betrachten Sie sich alle unten aufgeführten Beispiele und beobachten Sie die Denkschritte genau.

Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 normal Bsp.2 Bsp.3 Bsp.4 Bsp.5
Bsp.1 alternativ

klick

Gleichung	Äquivalenzumformung
$\frac{1}{3}\cdot(2x-1) = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$	$\mid \cdot 3 \cdot 3$
$3\cdot(2x-1) = -2x+3$	
$6x-3 = -2x+3$	$\mid +2x+3$
$8x = 6$	$\mid \cdot \frac{1}{8}$
$\boxed{x = \frac{3}{4}}$	

$$\boxed{\text{Lösungsmenge: } L = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$$

Fazit: Alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
besitzen genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

Das Lösen linearer Gleichungen

vibos.de

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b = 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Gleichung**.
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Betrachten Sie sich alle unten aufgeführten Beispiele und beobachten Sie die Denkschritte genau.

Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 normal Bsp.2 Bsp.3 Bsp.4 Bsp.5
Bsp.1 alternativ

klick

Gleichung	Äquivalenz-umformung
$2x - 4 = kx + 2$	$\mid -kx + 4$
$2x - kx = 6$	
$(2-k) \cdot x = 6$	$\mid \cdot \frac{1}{2-k}$
$x = \frac{6}{2-k}$	nur falls $k \neq 2$

$0 = 6$; falsche Aussage! , falls k=2

$L = \left\{ \frac{6}{2-k} \right\}$ falls $k \neq 2$

$L = \{ \}$ falls $k = 2$

Für k =2 existiert keine Lösung.

Fazit: Alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

besitzen genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

Das Lösen linearer Gleichungen

vibos.de

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b = 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Gleichung**.
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Betrachten Sie sich alle unten aufgeführten Beispiele und beobachten Sie die Denkschritte genau.

Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ○ normal Bsp.2 ○ Bsp.3 ○ Bsp.4 ◉ Bsp.5 ○
Bsp.1 ○ alternativ

klick

Gleichung	Äquivalenzumformung
$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$	$\mid \cdot 2 \cdot 3$
$5x + 2 - 3 = 3x + 2x - 1$	
$5x - 1 = 5x - 1$	$\mid -5x + 1$
$\boxed{0 = 0}$	Die Aussage ist wahr für alle $x \in \mathbb{R}$. $L = \mathbb{R}$

Fazit: Alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
besitzen genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

Das Lösen linearer Gleichungen

vibos.de

Eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b = 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Gleichung**.
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Betrachten Sie sich alle unten aufgeführten Beispiele und beobachten Sie die Denkschritte genau.

Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ○ normal　Bsp.2 ○　Bsp.3 ○　Bsp.4 ○　Bsp.5 ◉
Bsp.1 ○ alternativ

klick

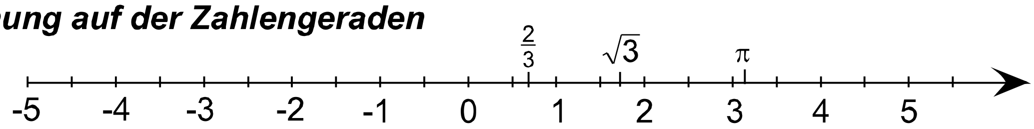
Gleichung	Äquivalenzumformung
$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$	$\mid \cdot 2 \cdot 3$
$5x + 2 - 9 = 3x + 2x - 1$	
$5x - 7 = 5x - 1$	$\mid -5x + 7$
$\boxed{0 = 6}$	

Die Aussage ist falsch für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Gleichung hat keine Lösung.
$L = \{\ \}$

Fazit: Alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
besitzen genau eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

Ordnung auf der Zahlengeraden

vibos.de



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "$a \le b$" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("$a \le b$" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, c ∈ IR gilt:
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; ($5 < 8$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 -7 < 1 -7$; ($-9 < -6$)

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl **k ≠ 0** **multipliziert** werden, **aber** ...

Ist **k > 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a < k \cdot b$

Ist **k < 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a > k \cdot b$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$; ($6 < 15$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$; ($6 > -3$)

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b < 0$ oder in die Form $a \cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenz-umformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ◉ Bsp.2 ○ Bsp.3 ○ Bsp.4 ○ Bsp.5 ○ Bsp.6 ○

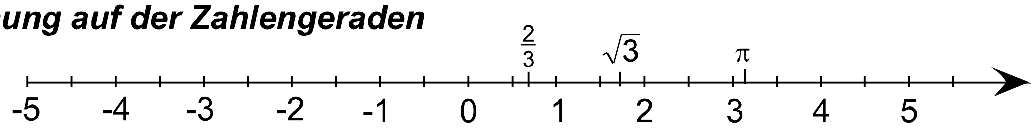
klick

Gleichung	Äquivalenz-umformung
$\frac{2}{3}x - 4 < \frac{5}{2}x + \frac{1}{6}$	$\cdot 2 \cdot 3$
$4x - 24 < 15x + 1$	$-15x + 24$
$-11x < 25$	$\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)$
$\boxed{x > -\frac{25}{11}}$	

$$\boxed{L = \left]-\frac{25}{11} ; +\infty\right[}$$

Ordnung auf der Zahlengeraden

vibos.de



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "a ≤ b" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("a ≤ b" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, c ∈ IR gilt:
$$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; $(5 < 8)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2-7 < 1-7$; $(-9 < -6)$

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl **k ≠ 0** **multipliziert** werden, **aber** ...

Ist **k > 0**, so gilt:
$$a<b \Leftrightarrow k\cdot a<k\cdot b$$

Ist **k < 0**, so gilt:
$$a<b \Leftrightarrow k\cdot a>k\cdot b$$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2\cdot 3 < 5\cdot 3$; $(6 < 15)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2\cdot(-3) > 1\cdot(-3)$; $(6 > -3)$

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a\cdot x + b < 0$ oder in die Form $a\cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

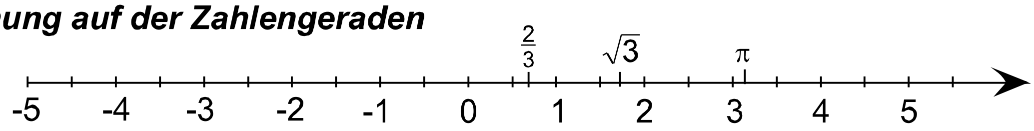
Bsp.1 ○ Bsp.2 ◉ Bsp.3 ○ Bsp.4 ○ Bsp.5 ○ Bsp.6 ○

klick

Gleichung	Äquivalenz-umformung
$\frac{1}{3}\cdot(2x-1) \ge -\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	$\vert \cdot 3\cdot 3$
$3\cdot(2x-1) \ge -2x+3$	
$6x-3 \ge -2x+3$	$\vert +2x+3$
$8x \ge 6$	$\vert \cdot \frac{1}{8}$
$\boxed{x \ge \frac{3}{4}}$	

$$\boxed{L = [\,0{,}75; +\infty\,[}$$

Ordnung auf der Zahlengeraden



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "$a \le b$" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("$a \le b$" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, c $\in$ IR gilt:
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; $(5 < 8)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 -7 < 1 -7$; $(-9 < -6)$

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl **$k \neq 0$ multipliziert** werden, **aber** ...

Ist **k > 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a < k \cdot b$

Ist **k < 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a > k \cdot b$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$; $(6 < 15)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$; $(6 > -3)$

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b < 0$ oder in die Form $a \cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ○ Bsp.2 ○ Bsp.3 ◉ Bsp.4 ○ Bsp.5 ○ Bsp.6 ○

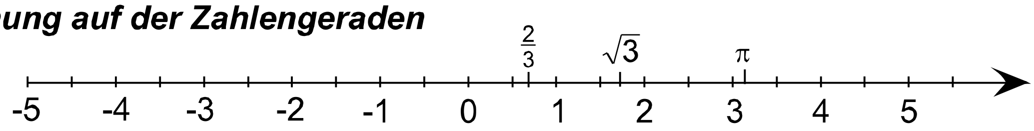
klick

Gleichung	Äquivalenzumformung
$-3 \le 1 - 0{,}5x < 4$	$\mid -1$
$-4 \le -0{,}5x < 3$	$\mid \cdot (-2)$
$8 \ge x > -6$	

$\boxed{-6 < x \le 8}$

$\boxed{L = \left]-6; 8\right]}$

Ordnung auf der Zahlengeraden



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "$a \le b$" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("$a \le b$" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, c $\in$ IR gilt:
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; ($5 < 8$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 -7 < 1 -7$; ($-9 < -6$)

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl **k ≠ 0** **multipliziert** werden, **aber** ...

Ist **k > 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a < k \cdot b$

Ist **k < 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a > k \cdot b$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$; ($6 < 15$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$; ($6 > -3$)

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b < 0$ oder in die Form $a \cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenz-umformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ○ Bsp.2 ○ Bsp.3 ○ Bsp.4 ◉ Bsp.5 ○ Bsp.6 ○

klick

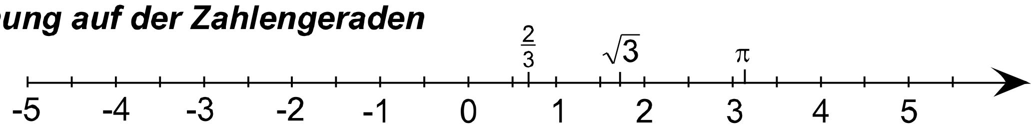
Gleichung	Äquivalenz-umformung
$k\,x - 4 < 2\,x + 2$	$\mid -2\,x + 4$
$k\,x - 2\,x < 6$	
$(k-2) \cdot x < 6$	$\mid \cdot \dfrac{1}{k-2}$
$x < \dfrac{6}{k-2}$ falls $k>2$; $x > \dfrac{6}{k-2}$ falls $k<2$	
$0 < 6$; wahre Aussage! , falls k=2	

$$L = \left]-\infty; \frac{6}{k-2}\right[\quad \text{falls } k > 2$$

$$L = \left]\frac{6}{k-2}; +\infty\right[\quad \text{falls } k < 2$$

$$L = \mathbb{IR} \quad \text{falls } k = 2$$

Ordnung auf der Zahlengeraden



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "$a \le b$" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("$a \le b$" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt:
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; $(5 < 8)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 -7 < 1 -7$; $(-9 < -6)$

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl $\mathbf{k \neq 0}$ **multipliziert** werden, **aber** ...

Ist $\mathbf{k > 0}$, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a < k \cdot b$

Ist $\mathbf{k < 0}$, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a > k \cdot b$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$; $(6 < 15)$
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$; $(6 > -3)$

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b < 0$ oder in die Form $a \cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenz-umformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 Bsp.2 Bsp.3 Bsp.4 Bsp.5 Bsp.6

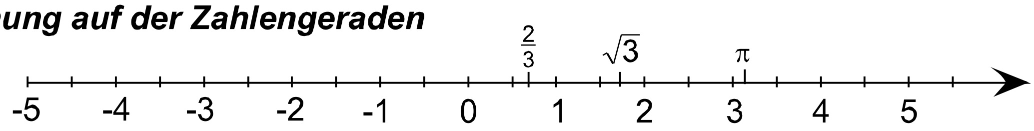
klick

Gleichung	Äquivalenz-umformung
$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$	$\mid \cdot 2 \cdot 3$
$5x + 2 - 3 \le 3x + 2x - 1$	
$5x - 1 \le 5x - 1$	$\mid -5x + 1$
$0 \le 0$	

Die Aussage ist wahr für alle $x \in \mathbb{R}$.
$L = \mathbb{R}$

Ordnung auf der Zahlengeraden

vibos.de



Alle reellen Zahlen lassen sich als Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.
Auf der Menge der reellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation "<" definiert.
D.h.: Für zwei beliebige verschiedene Zahlen a, b gilt entweder a<b oder b<a. ("a<b" ; sprich "a kleiner b")
Ist a<b, so liegt die Zahl a auf der oben gezeichneten Zahlengeraden links von der Zahl b.
z.B.: $-4 < -2$; $-2 < 1$; $0 < 0{,}3$ usw.
Allgemein gilt: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Man schreibt dann kurz: $a<b<c$)
Die Aussage "a<b" bzw. "$a \le b$" nennt man "**Ungleichung**" (Sie kann wahr oder falsch sein!).
("$a \le b$" ; sprich "a kleiner oder gleich b" bzw. "b größer oder gleich a")

Einfache Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

1 Zu beiden Seiten einer Ungleichung darf die gleiche Zahl (bzw. Term) **addiert** werden. D.h.:

Für **alle** Zahlen a, b, c ∈ IR gilt:
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2+3 < 5+3$; ($5 < 8$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 -7 < 1 -7$; ($-9 < -6$)

2 Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit der gleichen Zahl $\mathbf{k \neq 0}$ **multipliziert** werden, **aber** ...

Ist **k > 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a < k \cdot b$

Ist **k < 0**, so gilt:
$a < b \Leftrightarrow k \cdot a > k \cdot b$

Bsp: $2 < 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$; ($6 < 15$)
$-2 < 1 \Leftrightarrow -2 \cdot (-3) > 1 \cdot (-3)$; ($6 > -3$)

Achtung!
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht sich das "<"-Zeichen um!

Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form $a \cdot x + b < 0$ oder in die Form $a \cdot x + b \le 0$ mit der Variablen x umformen lässt, heißt **lineare Ungleichung**.
Aufgabe: Für welche Zahlen x (Lösungen) ist die Ungleichung wahr?
Die Lösungen linearer Gleichungen erhält man durch schrittweises Anwenden von Äquivalenzumformungen unter Beachtung der Rechenaxiome.
Die Wahl der Beispiele erfolgt durch "klick" auf die Radio-Buttons.

Bsp.1 ○ Bsp.2 ○ Bsp.3 ○ Bsp.4 ○ Bsp.5 ○ Bsp.6 ◉

klick

Gleichung	Äquivalenzumformung
$\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} > \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$	$\mid \cdot 2 \cdot 3$
$5x + 2 - 9 > 3x + 2x - 1$	
$5x - 7 > 5x - 1$	$\mid -5x + 7$
$\boxed{0 > 6}$	

Die Aussage ist falsch für alle x∈IR.
$L = \{\ \}$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungen bzw. linearen Ungleichungen!
Für alle Zahlen x gilt: $x \in \mathbb{R}$.

1 $3x - 5 = 7$;

2 $\frac{6}{5}x - 2 = 0$;

3 $2x - 9(3x + 1) = 3(x - 7) + 5(x + 2)$;

4 $\frac{4}{3}x - 1 = \frac{5}{2}x + \frac{1}{3}$;

5 $4 + \frac{5}{6}x = x + a$; (Für welche Zahlen a ist die Lösung x negativ?)

6 $ax - 4 = x - 2$;

7 $\frac{x-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2x-1}{2} - \frac{2}{3}x$;

8 $-\frac{3}{2}x \le \frac{5}{4}$;

9 $\frac{1}{2}x^2 - 4 > \frac{x}{2} \cdot (x - 3)$;

10 $-4 \le 2 - 3x \le 5$;

11 $ax - 2 < 3$; mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

12 $4 \cdot (10 - 2x) \ge -3 \cdot (x - 5)$;

13 Geben Sie ohne weitere Rechnung die Zahlen $a \in \mathbb{R}$ an, für die gilt: $a < \frac{a}{2}$

Zur Kontrolle klick

Zur Kontrolle klick

Gleichungen, lineare Gleichungen und Ungleichungen: Lösungen

1 $3x - 5 = 7 \Rightarrow L = \{4\}$

2 $\frac{6}{5}x - 2 = 0 \Rightarrow L = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3 $2x - 9(3x + 1) = 3(x - 7) + 5(x + 2) \Rightarrow L = \left\{\frac{2}{33}\right\}$

4 $\frac{4}{3}x - 1 = \frac{5}{2}x + \frac{1}{3} \Rightarrow L = \left\{-\frac{8}{7}\right\}$

5 $4 + \frac{5}{6}x = x + a \Rightarrow L = \{24 - 6a\}$

Die Lösung $24 - 6a$ ist negativ, falls $a > 4$.

6 $ax - 4 = x - 2 \Rightarrow L = \left\{\frac{2}{a-1}\right\}$ falls a $\neq 1$, $L = \{\ \}$ falls a $= 1$

7 $\frac{x-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2x-1}{2} - \frac{2}{3}x \Rightarrow L = \mathbb{R}$

8 $-\frac{3}{2}x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow L = \left[-\frac{5}{6}; +\infty\right[$

9 $\frac{1}{2}x^2 - 4 > \frac{x}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow L = \left]\frac{8}{3}; +\infty\right[$

10 $-4 \leq 2 - 3x \leq 5 \Rightarrow L = [-1; 2]$

11 $ax - 2 < 3 \Rightarrow L = \left]-\infty; \frac{5}{a}\right[$ falls a > 0, $L = \left]\frac{5}{a}; +\infty\right[$ falls a < 0

12 $4 \cdot (10 - 2x) \geq -3 \cdot (x - 5) \Rightarrow L =]-\infty; 5]$

13 Für alle negativen Zahlen, also $a < 0$.